11.2.13 Kvadratické funkce

Předpoklady:

Př. 1: Graf funkce $f: y = x(x-24)$ je definován pro všechna $x \in R$. Vrcholem grafu funkce *f* je bod $V[v_1; v_2]$. Urči souřadnici v_1 bodu *V*. **1 bod**

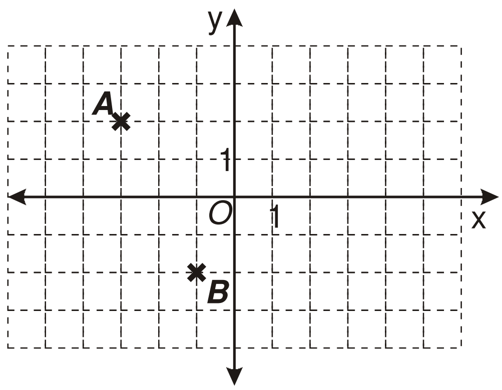
$f: y = x(x-24)$ $\Rightarrow$ graf funkce *f* se s osou *x* protíná v bodech $[0;0]$ a $[0;24]$ (pokud dosadíme za *x* hodnoty 0 nebo 24 vyjde $y = 0$).
Graf kvadratické funkce je osově souměrný podle svislé osy procházející vrcholem $\Rightarrow$ touto osou je přímka $x = 12$ $\Rightarrow$ *x*-ovou souřadnicí vrcholu je číslo 12.
$v_1 = 12$

Dodatek: Komplikovaněji je možné se dostat k řešení úpravami předpisu funkce *f*:
$y = x(x-24) = x^2 - 24x = x^2 - 2\cdot x \cdot 12 + 12^2 - 12^2 = (x-12)^2 - 144$ $\Rightarrow$ souřadnice vrcholu paraboly jsou $[12; -144]$ $\Rightarrow$ $v_1 = 12$.

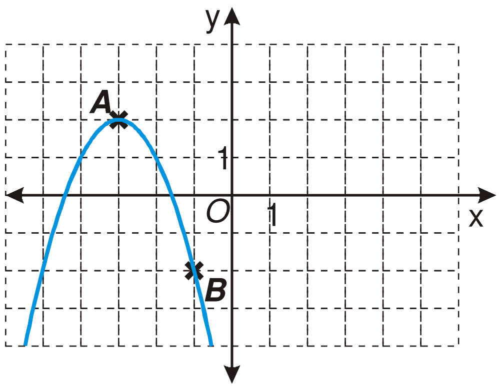
Př. 2: V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou vyznačeny dva mřížové body *A*, *B*. Grafem funkce *h* je parabola s vrcholem *A* procházející bodem *B*. Jaký je předpis funkce *h*?

A) $y = -2x - 4$ B) $y = x^2 + 2x - 1$ C) $y = -x^2 - 6x - 7$

D) $y = 3 \cdot \frac{2x+3}{x}$ E) $y = 2^{\frac{3-x}{2}} - 6$ **2 body**



Zkusíme si body podle zadání proložit graf.



Z obrázku vidíme, že parabola má v bodě *A* maximum (a je tedy převrácená v porovnání s grafem funkce $y = x^2$) $\Rightarrow$ předpisem musí být kvadratická funkce se záporným koeficientem před x^2 $\Rightarrow$ jedinou takovou funkcí v nabídce je funkce C) $y = -x^2 - 6x - 7$.
Kontrola: Upravíme předpis funkce C):

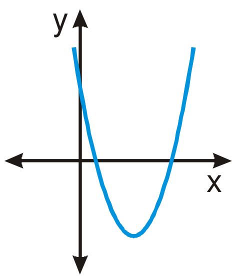
$$y = -x^2 - 6x - 7 = -\left(x^2 + 6x + 7\right) = -\left(x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 7\right) = -\left[\left(x+3\right)^2 - 2\right] = -\left(x+3\right)^2 + 2$$

$\Rightarrow$ grafem funkce C) je parabola s vrcholem $V\left[-3;\ 2\right]$ (přesně jako v zadání).
Správné řešeni: C).

Př. 3: Graf kvadratické funkce *f* s definičním oborem *R* má vrchol $V\left[3;-4\right]$ a prochází bodem $A\left[5;\ 0\right]$.

1. V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* sestroj graf funkce *f* a vyznač průsečíky grafu se souřadnicovými osami *x*, *y*.
2. Zapiš obor hodnot funkce.

Z polohy bodů *V* a *A* je zřejmé, že grafem funkce *f* je nepřevrácená parabola posunutá doprava a dolů.



Srovnáme polohu bodů *V* a *A* s grafem funkce $y = x^2$.

$y = x^2$	Funkce *f*
Vrchol $V\left[0;0\right]$	Vrchol $V\left[3;-4\right]$
	Bod $A\left[5;\ 0\right]$
	o dvě jednotky vpravo o čtyři jednotky výše

Hledáme u grafu funkce $y = x^2$ bod o dvě jednotky vpravo od vrcholu $\Rightarrow$ jde o bod $\left[2;\ 4\right]$, který je také o čtyři jednotky výše než vrchol $\Rightarrow$ funkce *f* je oproti funkci $y = x^2$ pouze posunutá, její graf není í deformován.

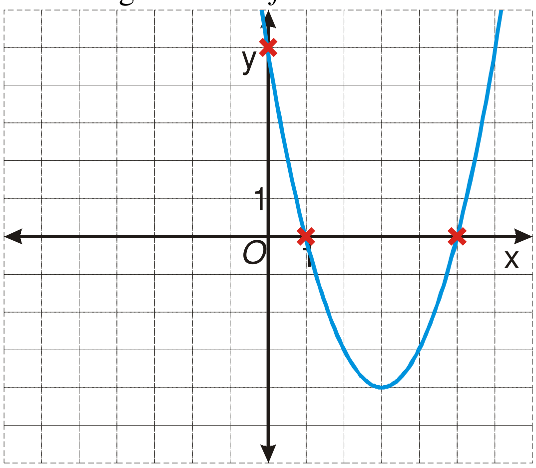
$y = x^2$	Funkce *f*
Vrchol $V\left[0;0\right]$	Vrchol $V\left[3;-4\right]$

Bod $[2;4]$ o dvě jednotky vpravo o čtyři jednotky výše

Bod $A[5;0]$ o dvě jednotky vpravo o čtyři jednotky výše

Bod $A[5;0]$ je průsečíkem s osou x $\Rightarrow$ druhým průsečíkem s osou x je bod, který je o dvě jednotky vlevo a o čtyři jednotky výše než vrchol, tedy bod $[1;0]$.

Počátek soustavy souřadnic je od vrcholu vzdálen o 3 jednotky nalevo $\Rightarrow$ hledáme souřadnice bodu, který je od vrcholu funkce $y=x^2$ o tři jednotky nalevo, jde o bod $[-3;9]$ $\Rightarrow$ tedy bod, který je o devět jednotek výše než vrchol $\Rightarrow$ průsečíkem funkce *f* s osou *y* bude bod o tři jednotky nalevo a devět jednotek výše než vrchol $V[3;-4]$, tedy bod $[0;5]$. Můžeme nakreslit graf funkce *f*.



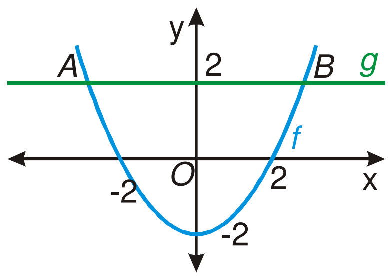
Z obrázku je ihned vidět, že pro obor hodnot funkce *f* platí $H_f = \langle -4;\infty)$

Dodatek: Příklad je také možno řešit sestavením předpisu funkce, dosazením $y=0$ do předpisu a vypočtením získané kvadratické rovnice.

Př. 4: V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf kvadratické funkce *f* a graf konstantní funkce *g*. Průsečíky grafů funkcí *f* a *g* jsou body *A*, *B*. Jaká je vzdálenost bodů *A*, *B*?

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4

D) $4\sqrt{2}$ E) 6 **2 body**



Graf nakreslené funkce není posunutý ve směru osy *x* (je souměrný podle osy *y*), vrchol je posunutý o 2 jednotky dolů do bodu $[0;-2]$ $\Rightarrow$ funkce je dána předpisem $y=ax^2-2$.

Koeficient *a* určíme dosazením jednoho z bodů, kterým funkce prochází. Například bod $[2;0]$: $0=a\cdot 2^2-2$

$4a=2 \quad /:4$

$a=0,5$ $\Rightarrow$ platí: $f: y=0,5x^2-2$

Funkce *g* je konstantní funkce procházející bodem $[0;2]$ $\Rightarrow$ platí: $g: y=2$.

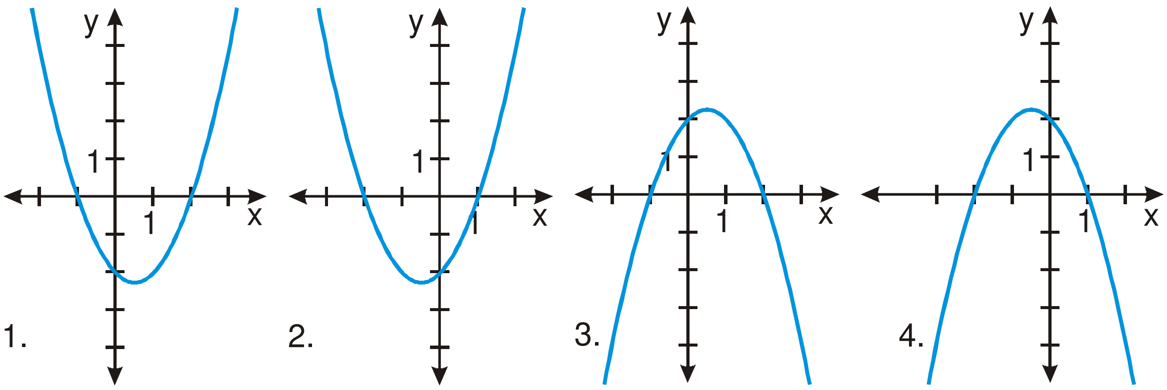
Body *A*, *B* jsou průsečíky obou funkcí $\Rightarrow$ vyhovují soustavě rovnic: $\begin{matrix} y=0,5x^2-2 \\ y=2 \end{matrix}$.

Dosadíme z druhé rovnice do první: $2 = 0{,}5x^2 - 2 \quad / +2$
$4 = 0{,}5x \quad / \cdot 2$
$x^2 = 8$
$x_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \qquad x_2 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$
Platí: $A\left[-2\sqrt{2}; 2\right]$, $B\left[2\sqrt{2}; 2\right]$, oba body mají stejnou y-ovou souřadnici, jsou osově souměrné podle y $\Rightarrow$ jejich vzdálenost je dvojnásobkem jejich vzdálenosti od osy y
$|AB| = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ správně je možnost D).

Př. 5: Každému z grafů (1. - 4.) kvadratické funkce přiřaď odpovídající předpis (A-F).

A) $y = (2-x)(x+1)$ B) $y = -(2-x)(x+1)$ C) $y = (x-2)(x-1)$
D) $y = -(x+2)(x-1)$ E) $y = -(x+2)(x+1)$ F) $y = (x+2)(x-1)$

max. 4 body



Pokud je předpis kvadratické funkce zadán ve tvaru $y = (x-a)(x-b)$, můžeme ihned určit průsečíky s osou x. Například pokud $x = a$, dosazením získáme:
$y = (x-a)(x-b) = (a-a)(a-b) = 0 \cdot (a-b) = 0$.
Funkce $y = (x-a)(x-b)$ se tedy protíná s osou x v bodech $P_1[a; 0]$ a $P_2[b; 0]$.
Všechny funkce jsou zadány tímto způsobem, můžeme tedy snadno určit jejich průsečíky s osou x a vybrat odpovídající grafy.
A) $y = (2-x)(x+1) = -(x-2)(x+1)$ $\Rightarrow$ graf funkce se protíná s osou x v bodech $P_1[2; 0]$ a $P_2[-1; 0]$, kvůli znaménku mínus bude po roznásobením před členem x^2 znaménko mínus $\Rightarrow$ grafem bude „převrácená“ parabola $\Rightarrow$ graf funkce je na obrázku 3.

B) $y = -(2-x)(x+1) = -\left[-(x-2)(x+1)\right] = (x-2)(x+1)$ $\Rightarrow$ graf funkce se protíná s osou x v bodech $P_1[2; 0]$ a $P_2[-1; 0]$, grafem bude „nepřevrácená“ parabola $\Rightarrow$ graf funkce je na obrázku 1.

C) $y = (x-2)(x-1)$ $\Rightarrow$ graf funkce se protíná s osou x v bodech $P_1[2; 0]$ a $P_2[1; 0]$ $\Rightarrow$ graf funkce není na žádném z obrázků.

D) $y=-(x+2)(x-1) \Rightarrow$ graf funkce se protíná s osou x v bodech $P_1[-2;0]$ a $P_2[1;0]$, kvůli znaménku mínus bude po roznásobením před členem x^2 znaménko mínus $\Rightarrow$ grafem bude „převrácená“ parabola $\Rightarrow$ graf funkce je na obrázku 4.

E) $y=-(x+2)(x+1) \Rightarrow$ graf funkce se protíná s osou x v bodech $P_1[-2;0]$ a $P_2[-1;0]$ $\Rightarrow$ graf funkce není na žádném z obrázků.

F) $y=(x+2)(x-1) \Rightarrow$ graf funkce se protíná s osou x v bodech $P_1[-2;0]$ a $P_2[1;0]$, grafem bude „nepřevrácená“ parabola $\Rightarrow$ graf funkce je na obrázku 2.

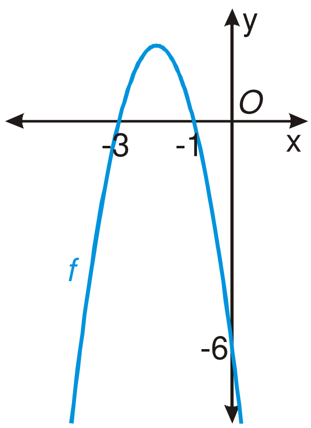
Správné řešení: 1B, 2F, 3A, 4D.

Př. 6: Kvadratická funkce f s definičním oborem R je dána grafem. Které z následujících vyjádření je předpisem funkce f?

A) $y=-(x+3)(x+1)+2$ B) $y=-2x^2+8x+6$

C) $y=-(x-3)(x-1)$ D) $y=-(x+3)(x+1)$

E) $y=-2x^2-8x-6$ **2 body**



Graf funkce prochází body $[-3;0]$ a $[-1;0]$ $\Rightarrow$ předpis funkce musí mít tvar $y=a(x+3)(x+1)$ (pokud dosadíme x-ové souřadnice do tohoto předpisu, vynuluje se jedna ze závorek a hodnota y vyjde nulová).

Koeficient a můžeme určit pomocí bodu $[0;-6]$, kterým funkce také prochází:

$y=a(x+3)(x+1)$ dosadíme $[0;-6]$: $-6=a(0+3)(0+1)$

$-6=3a \qquad /:3$

$a=-2$

Funkce f má předpis: $y=-2(x+3)(x+1)$ $\Rightarrow$ možnosti A), C), D) nejsou správné.

Upravíme předpis: $y=-2(x+3)(x+1)=-2(x^2+3x+x+3)=-2x^2-8x-6$ $\Rightarrow$ správná možnost je E)

Př. 7: Kvadratická funkce má předpis $y=x-3x^2+5$. Její graf potíná přímka p ve dvou různých bodech $P[p_1;-5]$ a $Q[q_1;-5]$. Vypočti souřadnice p_1, q_1 bodů P, Q.

max. 2 body

Přímka p prochází body $P[p_1;-5]$ a $Q[q_1;-5]$, oba mají stejnou y-vou souřadnici $\Rightarrow$ přímka p je vodorovná přímka s rovnicí $y=-5$.

Hledáme souřadnice průsečíků $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{l} y=x-3x^2+5 \\ y=-5 \end{array}$.

$-5=x-3x^2+5 \qquad /+3x^2-x-5$

$3x^2 - x - 10 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6}$$

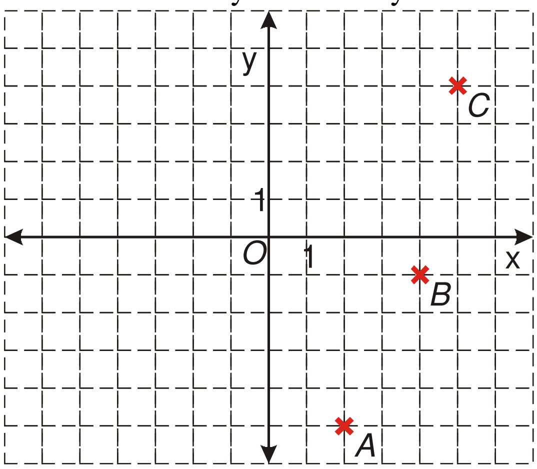
$x_1 = \frac{1+11}{6} = \frac{12}{6} = 2 = p_1$ $\qquad x_2 = \frac{1-11}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} = q_1$

Body P, Q mají souřadnice $P[2;-5]$ a $Q\left[-\frac{5}{3};-5\right]$.

Př. 8: Graf kvadratické funkce *f* prochází body $A[2;-5]$, $B[4;-1]$, $C[5;4]$. Jedním z těchto bodů prochází osa souměrnosti grafu funkce *f*.

1. Zapiš souřadnice vrcholu $V[x;\ y]$ grafu funkce *f*.
2. V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* sestroj graf funkce *f*. Dbej průsečíků grafu s mřížovými body soustavy souřadnic. V záznamovém archu všech obtáhni propisovací tužkou.
3. Zapiš obor hodnot funkce *f*. **max. 3 body**

Zakreslíme si body do soustavy souřadnic.



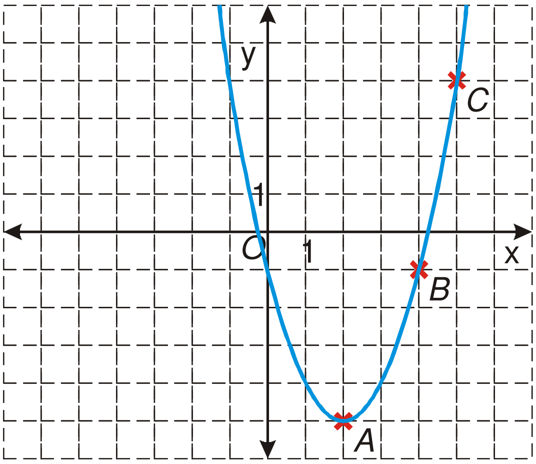
Osa souměrnosti prochází vrcholem paraboly $\Rightarrow$ jeden z vyznačených bodů musí být vrchol paraboly. Z obrázku je zřejmé, že to nemůže být bod *B* (nebyl by ani minimem, ani maximem).

Vrcholem paraboly nemůže být ani bod *C* (bylo by něm maximum, sklon paraboly by se vzdáleností od bodu *C* rostla, ale poloha bodů *B* je opačná. Sklon mezi body *C* a *B* je větší než sklon mezi body *A* a *B*).

Vrcholem paraboly je bod $A[2;-5]$ $\Rightarrow$ platí $V[2;-5]$.

Hledáme další body, kterými prochází parabola. Bod $B[4;-1]$ je dva jednotky napravo a o čtyři jednotky výše než bod $A[2;-5]$ $\Rightarrow$ hledaná parabola je pouze posunutý graf funkce $y = x^2$ (u ní je bod $[2;4]$ je dva jednotky napravo a o čtyři jednotky výše než bod $[0;0]$) $\Rightarrow$ graf funkce *f* bude procházet také body o jednu jednotku výše a jednu jednotku vpravo nebo vlevo od vrcholu $V[2;-5]$, tedy body $[1;-4]$ a $[3;-4]$.

Další body, kterými graf prochází získáme z osové souměrnosti podle přímky $x = 2 \Rightarrow$ graf bude procházet body $[0;-1]$ a $C[-1;4]$.



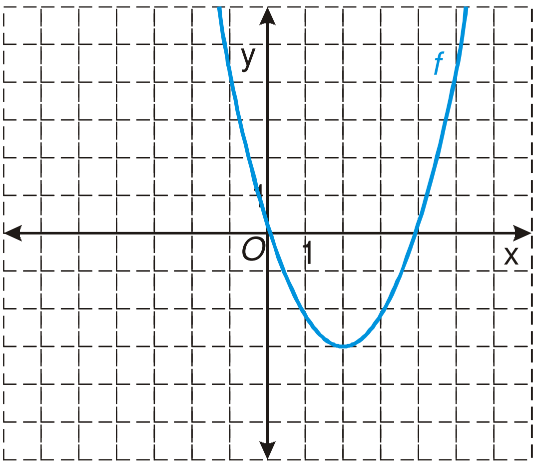
Oborem hodnot funkce *f* je interval $H_f = \langle -5;\infty)$.

Matematika plus

Př. 9: Je dána funkce $f: y = x^2 - 4x + 1,\ x \in (-\infty;1\rangle$. Jaký je definiční obor inverzní funkce f^{-1} k funkci *f*? A) $D(f^{-1}) = (-\infty;0\rangle$ B) $D(f^{-1}) = (-\infty;1\rangle$ C) $D(f^{-1}) = \langle 0;\infty)$ D) $D(f^{-1}) = \langle 1;\infty)$ E) $D(f^{-1}) = \langle 2;\infty)$ F) žádný, k funkci *f* neexistuje inverzní funkce. **2 body**

Upravíme si předpis funkce: $y = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 1 = (x-2)^2 - 3$.

Graf funkce $y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$ s neomezeným definičním oborem by vypadal takto:



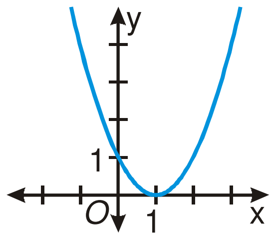
V intervalu $(-\infty;1\rangle$ je tedy funkce $y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$ prostá a existuje k ní funkce inverzní.

$f(1) = (1-2)^2 - 3 = 2 \Rightarrow D(f^{-1}) = H(f) = \langle 2;\infty)$

Správná odpověď: E) $D(f^{-1}) = \langle 2;\infty)$

Př. 10: V Kartézské soustavě souřadnic Oxy je sestrojen graf kvadratické funkce f s definičním oborem R. Pro funkci g platí:

$g(x) = -f(x+3)+4$.



1. Definiční obor funkce g lze zapsat jako sjednocení $(I_1 \cup I_2)$ takových dvou intervalů, že v každém z nich je funkce g monotónní. Z obou těchto intervalů zapiš ten interval, v němž je funkce g klesající.
2. Urči souřadnice průsečíků P_1, P_2 grafu funkce g se souřadnicovou osou x.

max. 2 body

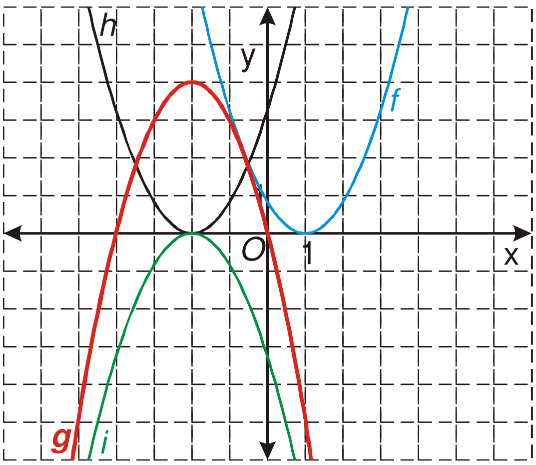
Zakreslíme graf funkce g.
Do obrázku zakreslíme postupně funkce:

$f(x)$

$h(x) = f(x+3)$

$i(x) = -h(x) = -f(x+3)$

$g(x) = i(x)+4 = -f(x+3)+4$



Z obrázku vidíme, že funkce $g(x)$ je klesající v intervalu $\langle -2; \infty)$.

Z obrázku můžeme zjistit i předpis funkce $g(x) = -(x+2)^2 + 4$.
Průsečíky s osou x jsou body grafu, pro které platí $y = 0$.

$0 = -(x+2)^2 + 4$

$(x+2)^2 = 4$

$|x+2| = 2$

$x_1 + 2 = 2 \qquad x_2 + 2 = -2$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -4$

Graf funkce g se osou x protíná v bodech $P_1[0; 0]$ a $P_2[-4; 0]$ (což je vidět i bez výpočtu z grafu).

Shrnutí: